

Exercices préliminaires EM3 : Equations de Maxwell

Exercice 1 : Chauffage par induction

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ . Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

1 - Faire un schéma du dispositif. Donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on se place dans l'ARQS magnétique et on néglige tout effet de bord, ce qui revient à assimiler la bobine à un solénoïde infini.

2 - Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

3 - On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, établir son expression en fonction notamment de r et I_0 .

$$\text{Donnée : } \vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Exercice 2 : Manipulation des équations de Maxwell

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \\ \vec{B}(M, t) = g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \end{cases}$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1 - Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

2 - Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

3 - Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

4 - En déduire une équation différentielle vérifiée par f . La résoudre en supposant que $\vec{E}(z=0, t=0) = E_0 \vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \rightarrow +\infty$ à tout instant.

5 - En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.